Gymnasium Odenthal

1. Klausur 12 MG, Schuljahr 2008/2009
Mathematik als Grundkursfach

Viel Erfolg

Arbeitszeit:	90 Minuten
Lernbereich :	Analysis
Thema:	Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

Name: ______________________ *Datum:* *12. September 2008*

Anzahl der abgegebenen Blätter (ohne Aufgabenblatt): [ ]

Bewertungseinheiten (BE): von

Zensurenpunkte: Datum: Unterschrift:

Aufgabe Formel I

Der Albert Park Circuit in Melbourne (Australien) ist erst seit 1996 fester Bestandteil des Formel 1-Grand-Prix, dennoch hat es dort bereits schwere Unfälle z. T. mit Todesfolge gegeben.
Ein besonderer Unfall-Schwerpunkt ist die Einfahrt zur Kurve 9, da hier der Streckenverlauf nahezu rechtwinklig abknickt (siehe Abbildung I).
Die Strecke zwischen Kurve 9 und Kurve 12 soll entschärft werden. Die Verantwortlichen planen die in Abbildung II eingezeichnete Streckenumlegung.
Im eingezeichneten Koordinatensystem entspricht Punkt P(0 | 0) einem Punkt vor Kurve 9 und die Kurve 12 dem Punkt Q(1 | 0,5) (Angabe in km)

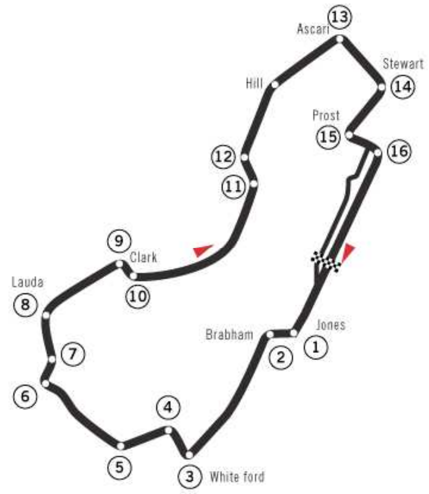

Abbildung I (Quelle: Wikipedia)

Der Streckenabschnitt vor Kurve 9 hat im eingezeichneten Koordinatensystem eine "Steigung" von 1. Der Streckenabschnitt hinter Kurve 12 hat eine "Steigung" von 2.
Die neue Streckenführung soll durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades modelliert werden, so dass sich das neue Streckenstück glatt in den bisherigen Straßenverlauf einfügt.

Hinweis: *"Glatt einfügen" bedeutet, dass die Steigung des neuen Streckenabschnitts mit der Steigung der alten Strecke in den Punkten P und Q übereinstimmt.*

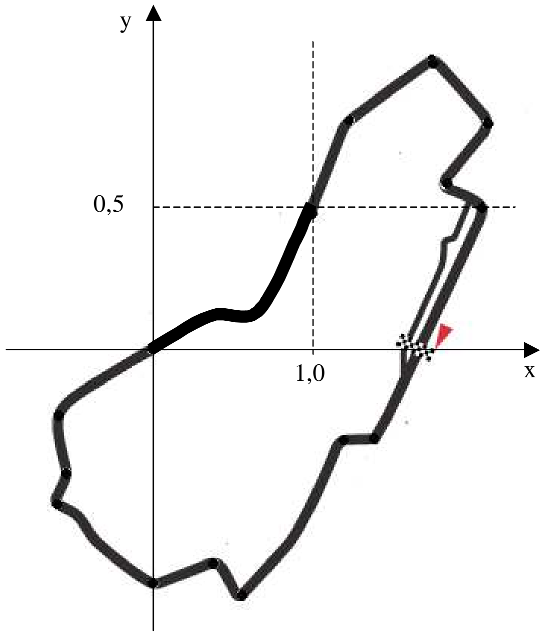

Abbildung II

a) Bestimmen Sie die gesuchte Funktion.

Zwischenergebnis: $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x$

b) Zeigen Sie, dass der so modellierte neue Streckenabschnitt eine Rechts-Links-S-Kurve ist.

Hinweis: *Eine Rechts-Links-S-Kurve ist eine Kurve, in der das Krümmungsverhalten von einer Rechts- in eine Linkskrümmung wechselt.*

Aufgabe Streichholzschachtel

Eine handelsübliche Schachtel Streichhölzer hat die Außenmaße
5 cm $\times$ 3,5 cm $\times$ 1,2 cm, also ein Volumen von 21 cm^3.
Die Schachtel wird aus einem Pappstück gefaltet, wobei ein Klebefalz berücksichtigt werden muss (s. Abbildung III).

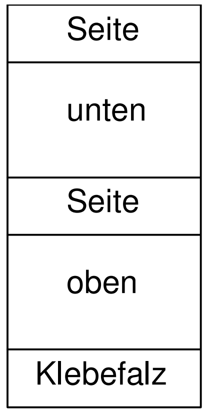

Abbildung III

a) Bestimmen Sie die Maße einer Streichholzschachtel, damit bei gleichem Volumen und gleicher Streichholzlänge der Materialverbrauch möglichst klein wird!

b) Vergleichen Sie die für die Herstellung dieser Schachtel benötigte Materialmenge mit der für eine Schachtel Streichhölzer verbrauchten Materialmenge (prozentuale Angaben)!

Aufgabe Betriebswirtschaft

Ein Industrieunternehmen, das nur ein Produkt herstellt, entnimmt seiner Betriebsbuchhaltung (Kosten- und Leistungsrechnung) folgende Angaben:

Der Kostenverlauf ist gekennzeichnet durch ständig steigende Gesamtkosten, wobei der Kostenzuwachs mit jeder produzierten Einheit unterschiedlich groß ist. Anfänglich nimmt der Kostenzuwachs bedingt durch effizienteren Arbeitskräfte- und Maschineneinsatz ab. Von einer bestimmten Produktionsmenge an ist der Kostenzuwachs jedoch durch höheren Energieverbrauch und Maschinenverschleiß steigend. Von den Gesamtkosten des Unternehmens sind die folgenden Zahlen bekannt:
Die fixen Kosten (= Kosten bei 0 produzierten Mengeneinheiten (ME)) belaufen sich auf 20 Geldeinheiten (GE), der Graph der Gesamtkostenfunktion hat im Punkt P(3 | 56) einen Wendepunkt und bei einer Produktionsmenge von 1 Mengeneinheit entstehen Kosten in Höhe von 42 Geldeinheiten

a) Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion 3. Grades die „einfachste“ Gesamtkostenfunktion ist, die die obigen Bedingungen erfüllt!
Ermitteln Sie anschließend aus obigen Angaben den Term der „einfachsten“ Gesamtkostenfunktion K des Unternehmens.
Zwischenergebnis: $K(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 20$

b) Skizzieren Sie den Graphen der Gesamtkostenfunktion K im Intervall [0 ; 9].
Wählen Sie dabei für die Ordinate 20 Geldeinheiten = 1 cm und für die Abszisse 1 Mengeneinheit = 1 cm.

c) Das Industrieunternehmen ist einer von vielen Anbietern auf dem Markt. Die Preisfunktion p ist demnach eine Konstante und sie lautet: p(x) = 26.
Bestimmen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G!
Ermitteln Sie mithilfe der Gewinnfunktion die Produktions-/ Absatzmenge, bei der ein maximaler Gewinn erzielt wird sowie den maximalen Gewinn!

d) Skizzieren Sie den Graphen der Gewinnfunktion G im Koordinatensystem aus Teilaufgabe b)!

nicht gewählte **Aufgaben Funktionstermbestimmung**

<u>leicht:</u>

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 3 ist punktsymmetrisch zum Ursprung, geht durch A (1 | 2) und hat für x=1 eine waagerechte Tangente. Bestimmen Sie die Funktion

<u>mittel-leicht:</u>

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist und durch die Punkte P(0 | 2) und Q(4 | –3) verläuft. Außerdem habe der Graph an der Stelle $x = 2$ ein lokales Maximum.

<u>mittel:</u>

Eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, hat bei x=2 eine Nullstelle. Der Graph dieser Funktion hat im Punkt P(1|-6) eine Tangente, die senkrecht zur Geraden y=1/2x+2 steht.

<u>schwer:</u>

Der Graph einer Funktion 3.Grades geht durch den Ursprung. Seine Wendetangente bei $x=2$ lautet $g(x)= -2x+8$.

Lösungen und Punkteverteilung

Aufgabe I	Punkte
a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$	2
P(0|0) mit m = 1: f(0) = 0 und f'(0) = 1	1
Q(1|0,5) mit m = 2: f(1) = 0,5 und f'(1) = 2	1
(I) f(0) = 0 => d = 0	1
(II) f'(0) = 1 => c = 1	1
(III) f(1) = 0,5 => a + b + 1 = 0,5 => a + b = –0,5	1
(IV) f'(1) = 2 => 3a + 2b + 1 = 2 => 3a + 2b = 1	1
TR: a = 2, b = –2,5 und c = 1, d = 0	1
$f(x) = 2x^3 - 2,5x^2 + x$	1
b) $f'(x) = 6x^2 - 5x + 1$ f''(x) = 12x – 5 f'''(x) = 12	2
notw. Bed. für WP: f'(x) = 0 ⇔ $x = -{}^{5}/_{12}$.	2
hinr. Bed. für RL-WP ist $f'''(x_w) > 0$: $f''(-{}^{5}/_{12}) = 12 > 0$ => RL-WP bei $-{}^{5}/_{12}$, also Rechts-Links-Kurve	2
Summe:	**16**
Aufgabe II	**Punkte**
a) EB: O = 5 · (3h + 2b) min	1
NB: 21 = 5 · b · h ⇔ $h = {}^{4,2}/_{b}$	1
ZF: $O(b) = 5\cdot({}^{12,6}/_{b} + 2b) = {}^{63}/_{b} + 10b$	1
$O'(b) = -63 / b^2 + 10$	1
$O''(b) = 126 / b^3$	1
notw. Bed. für lok. Extrema: O'(b) = 0 ⇔ $-63 / b^2 + 10 = 0 \Rightarrow b = \sqrt{6,3}$	1
hinr. Bed. für lok. Minimum: $O''(b_e) > 0$: $O''(\sqrt{6,3}) > 0$	1
Randwerte: 0 < b < ∝. In beiden Fällen ist O(b) = ∝	1
b) $O(\sqrt{6,3}) = 50,2$	0
O(3,5) = 53	0
Ersparnis: 5,28%	1
Summe:	**9**
Aufgabe III	**Punkte**
a) Ein WP (vorher Steigung fallend, nachher wieder steigend) => mind. 3. Grades	1
$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ K''(x) = 6ax + 2b	2
(0 | 20) auf K => f(0) = 20 (1 | 42) auf K => f(1) = 42	1
WP(3 | 56) => f(3) = 56 und f''(3) = 0	1
(I) f(0) = 20 => d = 20	1
(II) f'(1) = 42 => a + b + c + 20 = 42 => a + b + c = 22	1
(III) f(3) = 56 => 27a + 9b + 3c +20 = 56 => 27a + 9b + 3c = 36	1
(IV) f''(3) = 0 => 18a + 2b = 0	1
TR: a = 1, b = –9, c = 30 und d = 20	1

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 20$	1
b) Zeichnung	4
c) $p(x) = 26 \cdot x$	1
$G(x) = p(x) - K(x) = -x^3 + 9x^2 - 4x - 20$	1
$G'(x) = -3x^2 + 18x - 4$	1
$G''(x) = -6x + 18$	0
notw. Bed. für lok. Maximum: $G'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 18x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{23}/_3$	1
hinr. Bed. für lok. Max. $G''(x_e) < 0$: $G''(3+\sqrt{23}/_3) = -16{,}6 < 0$ => HP bei $3+\sqrt{23}/_3$	1
$G''(3-\sqrt{23}/_3) = 16{,}6 > 0$ => TP bei $3-\sqrt{23}/_3$	0
$G(3+\sqrt{23}/_3) = 64{,}46$	0
Randwert: $G(0) = 20$	0
Gewinnmaximum bei $x = 3+\sqrt{23}/_3 = 5{,}77$ ME mit 64,46 GE.	1
d) Zeichnung	2
Summe	**23**